线性代数　中国科学技术大学 2023 春
欧氏空间

主讲: 杨金榜
地空楼 525

助教: 苏煜庭、陈鉴、夏小凡

三维空间中有距离, 夹角等概念 $\xrightarrow{\text{坐标系}}$ 三维数组向量空间 $\mathbb{R}$ 上向量的模长和夹角.

比较容易地推广到 $\mathbb{R}^n$: $|(x_1,\cdots,x_n)| := \sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}$.

问题: 如何推广到抽象的线性空间上呢?

线性空间	$\overset{\text{基}\alpha_1,\cdots,\alpha_n}{\underset{1:1}{\longleftrightarrow}}$	$\mathbb{R}^n$
向量 v	$\longleftrightarrow$	坐标
线性变换 $\mathscr{A}$	$\longleftrightarrow$	A
??	$\longleftrightarrow$	长度, 夹角
$\mathscr{A}$(保持长度)	$\longleftrightarrow$	??
$\mathscr{A}$(??)	$\longleftrightarrow$	转置矩阵
$\mathscr{A}$(??)	$\longleftrightarrow$	对称矩阵

回顾 $\mathbb{R}^3$ 上的模长与夹角公式:

$$|a| = \sqrt{(a,a)}$$

$$\theta = \arccos \frac{(a,b)}{\sqrt{(a,a)(b,b)}}$$

容易看出模长和夹角可以由内积完全确定. 反之, 内积可由模长唯一确定

$$(a,b) = \frac{|a+b|^2 - |a|^2 - |b|^2}{2}.$$

总结 $\mathbb{R}^3$ 上内积有如下基本性质:

1. 对称性
2. 线性性
3. 正定性

为了在一般的 $\mathbb{R}$-线性空间上定义度量, 我们需要引入一般空间上的内积.

定义 (内积, 欧氏空间)

设 V 为有限维 $\mathbb{R}$-线性空间. 若存在一个映射 $(-,-)\colon V\times V\to\mathbb{R}$ 满足:

1. 对称性: $(a,b)=(b,a)$;
2. 双线性: $(\lambda a,b)=\lambda(b,a)$, $(a+b,c)(a,c)+(b,c)$;
3. 正定性: $(a,a)\geq 0$, 且等号成立当且仅当 $a=0$,

则称 (a,b) 为 a 和 b 的内积. 带内积的 $\mathbb{R}$-线性空间称为欧氏空间(或,欧几里得空间).

欧式空间 = $\mathbb{R}$-线性空间 + 内积;
$\mathbb{R}$-线性空间 = 集合 + 加法 + ($\mathbb{R}$) 数乘

注: 内积 $(-,-)$ 对第二个分量也是线性的.

性质 (内积的基本性质)

1. $\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i a_i, \sum_{j=1}^m \mu_j b_j\right)=\sum_{i=1}^k\sum_{j=1}^m \lambda_i\mu_j(a_i,b_j)$;
2. $(a,0)=0$;
3. 内积结构由一组基之间的内积完全确定.

为了定义夹角, 我们需要引入:

定理 (Cauchy-Schwarz 不等式)

设 V 为欧式空间. 对于任意 $a, b \in V$, 我们有

$$|(a,b)| \leq \sqrt{(a,a)\cdot(b,b)}.$$

证明思路: 考虑二次多项式 $(xa+b, xa+b)$ 的判别式.
可以定义夹角了!(不确定原理.)

定义 (长度, 夹角)

设 V 为欧氏空间. 对于任意向量 $a, b \in V$,

1. 称 $|a| := \sqrt{(a,a)}$ 为 a 的长度(或,模长);
2. 称 $|a-b|$ 为 a 和 b 之间的距离. 记为$d(a,b)$.
3. 若 a, b 不为零, 定义 a 和 b 之间的夹角为 $\theta = \arccos\frac{(a,b)}{|a|\cdot|b|}$. 特别地, 当 $(a,b)=0$ 时, 称 a 与 b正交或垂直, 记为 $a \perp b$.
4. 称 a 为单位向量, 若 $|a|=1$. 若 $b \neq 0$, 称 $\frac{1}{|b|}b$ 为 b 的单位化.

距离基本性质

性质

1. 对称性: $d(a,b)=d(b,a)$;
2. 正定性: $d(a,b)\geq 0$, 等号成立当且仅当 $a=b$;
3. 三角不等式: $d(a,c)\leq d(a,b)+d(b,c)$;
4. 勾股定理: $a\perp b$ 当且仅当 $|a|^2+|b|^2=|a+b|^2$;
5. 菱形定理: 若 $|a|=|b|$, 则 $(a+b)\perp(a-b)$.

例

设 $V=\mathbb{R}^n$, 对于任意两向量 $a=(a_1,\cdots,a_n)$ 和 $b=(b_1,\cdots,b_n)$, 定义

$$(a,b)=a_1b_1+\cdots+a_nb_n.$$

则 $(-,-)$ 为 V 上的一个内积. 这一内积给出通常的模长和夹角. 此时 Cauchy-Schwarz 公式为

$$\left(\sum_{i=1}^n a_ib_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right).$$

例

类似的 $(a,b)=a_1b_1+2a_2b_2+\cdots+na_nb_n$ 也可以定义 $V=\mathbb{R}^n$ 上的一个内积.

构造一个内积使得给定的一组基均为单位向量且两两垂直.

例

设 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 为 n 维 $\mathbb{R}$-线性空间 V 上的一组基. 对于任意向量 $\alpha, \beta \in V$, 定义

$$(\alpha, \beta) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n,$$

其中 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 和 $(b_1, b_2, \cdots, b_n)$ 分别为 α 和 β 在基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 下的坐标. 则 $(-,-)$ 为 V 上的内积. 在此内积下 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 均为单位向量且两两垂直. 即,

$$(\alpha_i, \alpha_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

任意有限维实线性空间一定存在内积. 注: 任意内积均为这一形式!

在无穷维空间上也可类似的定义内积.

例 (无限维空间上的内积)

对应任意 $[a,b]$ 上的连续函数 $f,g\in C[a,b]$, 定义

$$(f,g):=\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

类似地, 定义连续函数的模长, 夹角和正交等概念. 此时 Cauchy-Schwarz 公式为

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2\leq\left(\int_a^b f(x)^2\mathrm{d}x\right)\cdot\left(\int_a^b g(x)^2\mathrm{d}x\right).$$

当 $a=-\pi, b=\pi$ 时, 三角函数 $1,\cos x,\sin x,\cos 2x,\sin 2x,\cdots$ 在这一内积下两两正交.

我们称带内积完备的$\mathbb{R}$-线性空间为Hilbert 空间.

设 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 为欧氏空间 V 的一组基. 任取 $\alpha = a_1\alpha_1 + \cdots + a_n\alpha_n$, $\beta = b_1\alpha_1 + \cdots + b_n\alpha_n \in V$, 则

$$(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i b_j (\alpha_i, \alpha_j). \tag{1}$$

因此内积 $(-,-)$ 由值 $g_{ij} := (\alpha_i, \alpha_j)(1 \le ij \le n)$ 唯一确定. 记

$$G := (g_{ij})_{n\times n}.$$

称 G 为内积 $(-,-)$ 在基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 下的度量矩阵. 记

$$x = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

则(1)可简写为

$$(\alpha, \beta) = x^T G y.$$

通过度量矩阵我们有如下映射

$$V \text{ 上的内积} \xrightarrow{\text{基}\alpha_1,\cdots,\alpha_n} \mathbb{R}\text{上的 } n \text{ 阶矩阵}$$

$$(-,-) \longmapsto G = \Big((\alpha_i, \alpha_j)\Big)_{n\times n}$$

问题: 哪些矩阵落在这个映射的像集里面? 即, 哪些矩阵能够成为某个内积的度量矩阵?

性质 (度量矩阵的基本性质)

1. 设 G 为 V 上某内积 $(-,-)$ 在基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 下的度量矩阵. 则
   - G 为实对称矩阵;
   - 对任意 $x \in \mathbb{R}^n$, 都有 $x^TGx \geq 0$, 且等号成立当且仅当 $x = 0$.

   称满足如上性质的矩阵为正定矩阵. 因此内积的度量矩阵为正定矩阵.
2. 反之, 对于任意给定的正定矩阵 G, 通过
   $$(\alpha, \beta) := x^TGy$$
   可以构造出 V 上的一个内积, 其中 x, y 为 α 和 β 的坐标.

问题:

1. 不同基下度量矩阵之间的关系?
2. 度量矩阵的最简形式, 在哪组基下度量矩阵为最简单形式?

性质

设 P 为欧氏空间的两组基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 和 $\eta_1, \cdots, \eta_n$ 为之间的过渡矩阵

$$(\eta_1, \cdots, \eta_n) = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)P.$$

设内积在 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 和 $\eta_1, \cdots, \eta_n$ 下的度量矩阵为 G 和 $\overline{G}$. 即,

$$G = \Big((\alpha_i, \alpha_j)\Big)_{n\times n}, \quad \overline{G} = \Big((\eta_i, \eta_j)\Big)_{n\times n}.$$

则

$$\overline{G} = P^T GT.$$

证明思路:

$$\overline{G}_{(i,j)} = (\eta_i, \eta_j) = \left(\sum_{s=1}^n p_{si}\alpha_s, \sum_{t=1}^n p_{tj}\alpha_t\right) = \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n p_{si} G_{(s,t)} p_{tj} = (P^T GP)_{(i,j)}.$$

相合关系及其基本性质

定义 (相合)

称两个矩阵 G 和 $\overline{G}$ 相合, 若存在可逆阵 P 使得
$$\overline{G} = P^T G P.$$

性质

1. 内积在不同基下的度量矩阵相合;
2. 相合为等价关系.

实对称矩阵的相合分类, 以及相合标准形 (第八章).

标准正交基

度量矩阵的最简形式? 为了回答这一问题, 我们需要引入标准正交基.

定义 (标准正交基)

设 V 为 n 维欧氏空间.

1. 称由一组两两正交的非零向量为正交向量组;
2. 称由正交向量组构成的基为正交基;
3. 称由单位向量组成的正交基为标准正交基.

例

设 $(-,-)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上的一内积.

1. 若 $((x_1,\cdots,x_n),(y_1,\cdots,y_n))=\sum_{i=1}^n x_iy_i$. 则自然基
$$e_1,\cdots,e_n$$
为一组标准正交基.
2. 若 $((x_1,\cdots,x_n),(y_1,\cdots,y_n))=\sum_{i=1}^n ix_iy_i$. 则
$$e_1,\frac{e_2}{\sqrt{2}}\cdots,\frac{e_n}{\sqrt{n}}$$
为一组标准正交基.